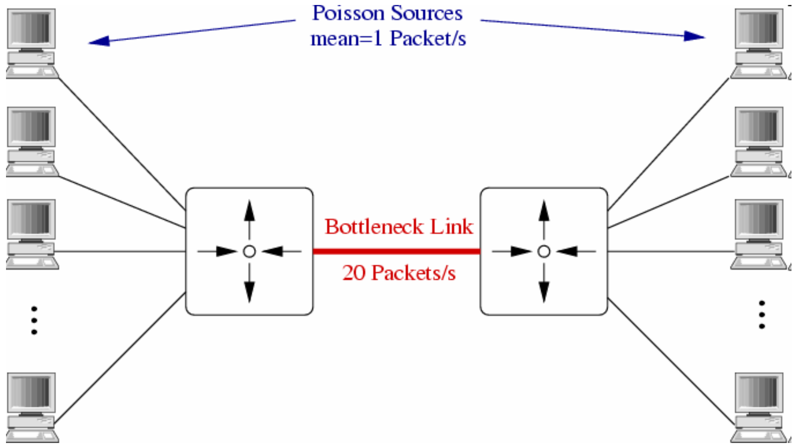
Modelos de Colas Poissonianos



CONTENIDOS

1. Introducción a las colas poissonianas.
2. Modelo de colas poissoniano con un servidor *M/M/1*
3. Modelo con un servidor y capacidad finita *M/M/1/K*
4. Modelo con varios servidores *M/M/c*. Fórmula *C* de Erlang
5. Modelo con infinitos servidores *M/M/∞*
6. Modelo con varios servidores y pérdidas *M/M/c/K*
7. Modelo M/M/c con pérdidas (modelo *M/M/c/c*). Fórmula *B* de Erlang.
8. Modelo con un servidor, población finita *M/M/1/K/K*
9. Modelo con c servidores, población finita *M/M/c/K/K*

4. Modelo *M/M/c*: *c* servidores en paralelo

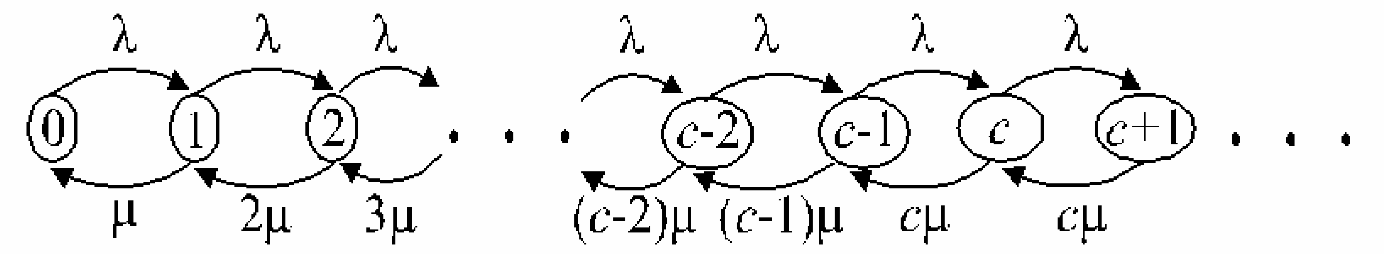
Se dispone de *c* servidores paralelos idénticos, cada uno de los cuales sirve a una tasa de μ clientes por unidad de tiempo.

Luego, si los *c* están utilizándose, la tasa media de salida del servicio es *c*μ. Cuando hay $n < c$ clientes en el sistema, sólo trabajan *n* servidores y, por tanto, la tasa de servicio es *n*μ. Es decir, las tasas de nacimiento y muerte son

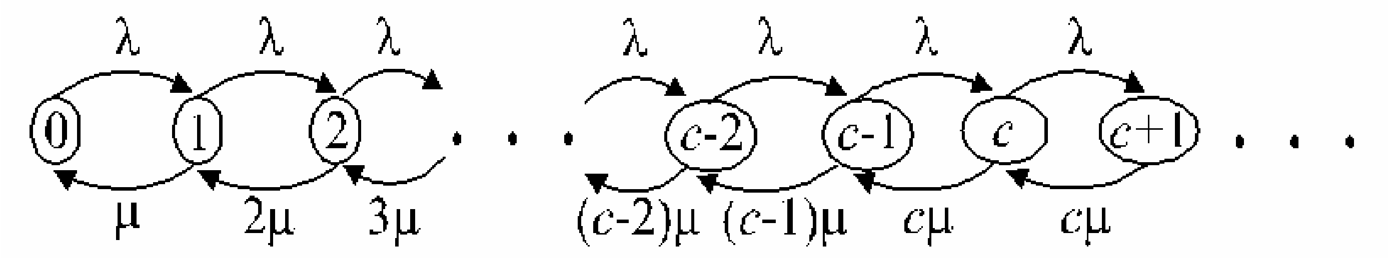
$$\lambda_n = \lambda, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & \text{si } n = 1, 2, \ldots, c \\ c\mu, & \text{si } n \geq c \end{cases}$$

y su diagrama de transición es



Modelo con varios servidores *M/M/c*. Fórmula *C* de Erlang



El sistema de ecuaciones en equilibrio es:

Estado	Tasa entrada	=	Tasa salida
0	$\mu\pi_1$	$=$	$\lambda\pi_0$
$1 \leq n \leq c-1$	$\lambda\pi_{n-1} + (n+1)\mu\pi_{n+1}$	$=$	$(\lambda + n\mu)\pi_n$
$n \geq c$	$\lambda\pi_{n-1} + c\mu\pi_{n+1}$	$=$	$(\lambda + c\mu)\pi_n$

El proceso para alcanzar la solución del sistema es el siguiente:

Modelo con varios servidores *M/M/c*. Fórmula *C* de Erlang

$$
\begin{aligned}
\pi_0\lambda &= \pi_1\mu \\
\pi_1(\lambda+\mu) &= \pi_0\lambda + \pi_2 2\mu \\
\pi_2(\lambda+\mu) &= \pi_1\lambda + \pi_3 3\mu \\
&\cdots \\
\pi_{c-1}(\lambda+(c-1)\mu) &= \pi_{c-2}\lambda + \pi_c c\mu \\
\pi_c(\lambda+c\mu) &= \pi_{c-1}\lambda + \pi_{c+1} c\mu \\
\pi_{c+1}(\lambda+c\mu) &= \pi_c\lambda + \pi_{c+2} c\mu \\
&\cdots \\
\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\pi_0\lambda = \pi_1\mu \\
\pi_1\lambda = \pi_2 2\mu \\
\pi_2\lambda = \pi_3 3\mu \\
\cdots \\
\pi_{c-1}\lambda = \pi_c c\mu \\
\pi_c\lambda = \pi_{c+1} c\mu \\
\pi_{c+1}\lambda = \pi_{c+2} c\mu \\
\cdots \\
\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\
\pi_2 &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{1}{2!}\pi_0 \\
&\cdots \\
\pi_{c-1} &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1} \frac{1}{(c-1)!}\pi_0 \\
\pi_c &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c} \frac{1}{c!}\pi_0 \\
\pi_{c+1} &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} \frac{1}{c!c}\pi_0 \\
&\cdots \\
\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

Modelo con varios servidores *M/M/c*. Fórmula *C* de Erlang

Obteniendo finalmente ($r = \lambda/\mu$ es la intensidad de tráfico):

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} (r/c)^{n-c}\right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!(1 - \frac{\lambda}{c\mu})}\right]^{-1}$$

y

$$\pi_n = \begin{cases} \dfrac{r^n}{n!}\pi_0, & \text{si } n = 0, 1, ..., c \\ \dfrac{r^n}{c!c^{n-c}}\pi_0, & \text{si } n \geq c \end{cases}$$

Para obtener π_0 hemos impuesto que el factor de utilización $\rho = \lambda/(c\mu) < 1$, que es la condición de estabilidad.

Modelo con varios servidores *M/M/c*. Fórmula *C* de Erlang

Una probabilidad de interés en este modelo es la probabilidad de tener que esperar en la cola (todos los servidores están ocupados), es decir, $P(N \geq c)$, que se denota como $C(c, r)$, llamada fórmula C de Erlang:

$$C(c,r) = P(N \geq c) = 1 - P(N < c) = 1 - \sum_{n=0}^{c-1} \pi_n = 1 - \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!}\pi_0$$

$$= 1 - \pi_0 \left(\frac{1}{\pi_0} - \frac{r^c}{c!(1-\frac{\lambda}{c\mu})} \right) = \pi_0 \frac{r^c}{c!(1-\rho)} = \frac{\pi_c}{1-\rho}$$

$$= \frac{r^c/c!}{(1-\rho)\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!(1-\rho)}\right]},$$

Normalmente, se deja al software (por ejemplo, WinQSB) que calcule los valores $C(c,r)$, si bien tradicionalmente se obtenían de forma aproximada a partir de su representación gráfica (Allen, 1978). Hoy en día es muy sencillo programar estas fórmulas.

Modelo con varios servidores *M/M/c*. Fórmula *C* de Erlang

Medidas de rendimiento

Comenzamos calculando L_q, por ser más sencillo que L

$$L_q = E(N_q) = \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_{n+c} = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{r^{n+c}}{c!c^n}\pi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{r^c r^n}{c!c^n}\pi_0 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{r^c\rho^n}{c!}\pi_0 = \pi_0\frac{r^c}{c!}\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \pi_0\frac{r^c}{c!}\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = C(c,r)\frac{\rho}{1-\rho},$$

Empleando las fórmulas de Little llegamos a:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{C(c,r)}{c\mu(1-\rho)}.$$

El tiempo medio de espera en cola para aquellos clientes que deben esperar:

$$E(q \mid q>0) = \frac{W_q}{P(q>0)} = \frac{W_q}{C(c,r)} = \frac{1}{c\mu(1-\rho)}.$$

Modelo con varios servidores *M/M/c*. Fórmula *C* de Erlang

A partir de aquí, podemos conseguir expresiones para *W* y *L* :

$$W = W_q + W_s = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{C(c,r)}{c(1-\rho)}\right)$$
$$L = \lambda W = c\rho + C(c,r)\frac{\rho}{1-\rho}$$

Obtengamos las distribuciones de las v.a. *q* y *w*.

Para *q*, debemos tener en cuenta que el cliente que no espera en cola ($q = 0$) es el que al llegar encuentra en el sistema $N = n < c$ clientes. En caso contrario, con $n \geq c$, la longitud de la cola es $n - c$ y el cliente tendrá que esperar a que se sirvan n-c+1 clientes (el que está siendo servido también cuenta).

De este modo, su tiempo en cola es $q = s_1 + \ldots + s_{n-c+1}$, con s_i v.a.i.i.d. según Exp($c\mu$), que conduce a que *q* siga una distribución gamma de parámetros $p = n-c+1$ y $a = c\mu$.

Modelo con varios servidores *M/M/c*. Fórmula *C* de Erlang

Por lo tanto, para $t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
F_q(t) &= P(q=0) + P(0 < q \leq t) = 1 - C(c,r) + \sum_{n=c}^{\infty} P(q \leq t \mid N = n)\pi_n \\
&= 1 - C(c,r) + \sum_{n=c}^{\infty} \left[\int_0^t c\mu e^{-c\mu x} \frac{(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} dx \right] \frac{r^n}{c!c^{n-c}} \pi_0 \\
&= 1 - C(c,r) + \frac{\pi_0 r^c}{(c-1)!} \int_0^t \mu e^{-c\mu x} \left(\sum_{n=c}^{\infty} \frac{(r\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} \right) dx \\
&= 1 - C(c,r) + \frac{\pi_0 r^c}{(c-1)!} \int_0^t \mu e^{-(c-r)\mu x} dx \\
&= 1 - C(c,r) + \frac{\pi_0 r^c}{(c-1)!} \frac{1 - e^{-(c-r)\mu t}}{c-r} \\
&= 1 - C(c,r) + C(c,r)(1 - e^{-(c-r)\mu t}) = 1 - C(c,r)e^{-(1-\rho)c\mu t}.
\end{aligned}
$$

Modelo con varios servidores *M/M/c*. Fórmula *C* de Erlang

En los dos últimos pasos utilizamos que $c - r = c\,(1 - \rho)$.

q tiene un punto (t=0) con probabilidad positiva: $P(q=0) = P(N < c) = 1 - C(c, r)$.

Análogamente, podemos obtener la distribución de *w:*

$$F_w(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{r - c + 1 - C(c,r)}{c - 1 - r} e^{-\mu t} + \dfrac{C(c,r)}{c - 1 - r} e^{-(1-\rho)c\mu t}, & \text{si } r \neq c - 1 \\ 1 - [1 + C(c,r)\mu t] e^{-\mu t}, & \text{si } r = c - 1 \end{cases}$$

Obviamente, tomando c = 1, recuperamos las fórmulas del modelo *M/M/1.*